2018 年 6 月 20 日

第 11 章　最適ポートフォリオとの選択と資本評価モデル

担当：北野

本章の目的は、投資家はいかに最適ポートフォリオを構築できるかについて検討することである。まず少ない銘柄数でのポートフォリオの期待収益率とボラティリティの算出方法を知り、徐々に制限を減らしながら、最適ポートフォリオの構築方法を学ぶ。最後には最適ポートフォリオを用いた資本コストとリスクプレミアムの計算方法についても書かれている。

11.1　ポートフォリオの期待収益率

ポートフォリオウェイトx_i：ポートフォリオに占めるここの投資対象が、ポートフォリオ全体と投資に占める割合。

$$x_i = \frac{\text{投資}i\text{の価値}}{\text{ポートフォリオの価値}}$$

ポートフォリオの収益率R_p：ポートフォリオに含まれる個々の投資対象の収益率の加重平均。

$$R_p = x_1R_1 + x_2R_2 + \cdots + x_nR_n = \sum_i x_iR_i$$

ポートフォリオの期待収益率$E[R_p]$：ポートフォリオに含まれる個々の投資対象の期待収益率の加重平均。

$$E\left[R_p\right] = E\left[\sum_i x_iR_i\right] = \sum_i E[x_iR_i] = \sum_i x_iE[R_i]$$

11.2　２社の株式で構成されるポートフォリオのボラティリティ

1) リスクの結合
   ① ポートフォリオに株式を組み入れて分散化することによってリスクが低下する
   ② ポートフォリオに組み入れることで消滅するリスクの量は、それらの株式が直面する共通するリスクの大きさとどの程度株価が連動するかによって決まる。

2) 共分散Cov：２つの収益率R_i, R_jの平均からのかい離の席の期待値。

$$Cov\left(R_i, R_j\right) = E\left[(R_i - E[R_i])\left(R_j - E\left[R_j\right]\right)\right]$$

過去のデータを用いた共分散の推定値

$$Cov\left(R_i, R_j\right) = \frac{1}{T-1}\sum_i (R_{i,t} - R_i)(R_{j,t} - R_j)$$

3) 相関$Corr$：２銘柄の収益率間の関係の強さ。

$$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{SD(R_i)SD(R_j)}$$

4) ポートフォリオの分散とボラティリティの計算

・２銘柄の株式から構成されるポートフォリオの分散Var

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= Cov(R_p, R_p) \\ &= Cov(x_1R_1 + x_2R_2, x_1R_1 + x_2R_2) \\ &= x_1^2Vav(R_1) + x_2^2Var(R_2) + 2x_1x_2Cov(x_1, x_2) \end{aligned}$$

・ボラティリティSD

$$SD(R_p) = \sqrt{Var(R_p)}$$

11.3　組み入れ銘柄数の多いポートフォリオのボラティリティ

ポートフォリオに３銘柄以上の株式を保有することによって、分散化による追加的な利益を得ることができる。

1) 組み入れ銘柄の多いポートフォリオの分散

$$Var(R_p) = Cov(R_p, R_p) = Cov(\sum_i x_iR_i, R_p) = \sum_i x_iCov(R_i, R_p)$$

2) 等ウェイトポートフォリオによる分散化

$$Var(R_p) = \frac{1}{n}(\text{個々の株式の分散の平均}) + (1 - \frac{1}{n})(\text{株式間の共分散の平均})$$

3) 一般的なポートフォリオの分散化

$$Var(R_p) = \sum_i x_iCov(R_i, R_p) = \sum_i x_iSD(R_i)SD(R_p)Corr(R_i, R_p)$$

両辺を$SD(R_p)$で割ると

$$SD(R_p) = \sum_i x_i \times SD(R_i) \times Corr(R_i, R_p)$$

11.4　リスク 対 収益率：効率的ポートフォリオの選択

1) ２銘柄株式からなる効率的ポートフォリオ

・非効率ポートフォリオ：期待収益率とボラティリティの両方を改善できるような別のポートフォリオを見つけることができるときの元のポートフォリオ。

・投資家は、自分の選好にもとづいて収益率とリスクを選択するため、効率的ポートフォリオの間では簡単には順序付けはできない。

2) 相関の影響

・ポートフォリオの期待収益率は相関の影響を受けない。

・ポートフォリオのボラティリティは相関の大きさによって変わる。特に相関が低くなるほど、ボラティリティも低下する。

3) 空売り

自分が保有していない株式を売り、将来その株式を買い戻すことを約束する取引。

4) 多くの株式銘柄を含む効率的ポートフォリオ

・効率的フロンティア：所与のボラティリティのもとで最も高い期待収益率を提供するポートフォリオの境界線。

・一般的に、新しい投資機会を追加すると、より大きい分散化が可能となり、効率的フロンティアが改善される。

11.5 無リスクの預金と借入

資金の一部を安全な無リスクの資産に振り向けることで、ポートフォリオのリスクを減少させることができる。

1) 無リスク証券への投資

・期待収益率

$$E[R_{xP}] = (1-x)r_f + xE[R_P] = r_f + x(E[R_P] - r_f)$$

・ボラティリティ

$$SD(R_{xP}) = \sqrt{x^2 Var(R_P)} = xSD(R_P)$$

2) 接点ポートフォリオの識別

・シャープ比

$$\text{シャープ比} = \frac{\text{ポートフォリオの超過収益率}}{\text{ポートフォリオのボラティリティ}} = \frac{E[R_P] - r_f}{SD(R_P)}$$

・シャープ比の傾きを持った直線がリスクのある投資の効率的フロンティアと接する。この接線を導き出すポートフォリオは接点ポートフォリオと呼ばれる。接点ポートフォリオは効率的ポートフォリオであり、投資家のリスクに対する選好とは独立している。

11.6　効率的ポートフォリオと資本コスト

1)　ポートフォリオを改善する方法：ベータと要求収益率

・ポートフォリオ P をとりあげ、無リスク資産を空売りし、株式投資案iに投資する場合、以下が成り立つとiに投資すべきである。

$$E[R_i]-r_f > SD(R_i)\times Corr(R_i,R_P)\times\frac{E[R_P]-r_f}{SD(R_P)}$$

・ポートフォリオ P に対する投資iのベータ値

$$\beta_i^P=\frac{SD(R_i)\times Corr(R_i,R_P)}{SD(R_P)}$$

・要求収益率r_i：iへの投資がそのポートフォリオに貢献するリスクに見合った必要な期待収益率のことである。

$$r_i=r_f+\beta_i^P\times(E[R_P]-r_f)$$

・期待収益率が要求収益率を上回るならば、iへの投資額を増やすことによりポートフォリオ P のシャープ比が上昇する。

2)　期待収益率と効率的ポートフォリオ

・あるポートフォリオが効率的であるための必要十分条件は、すべての利用可能な証券の期待収益率がその要求収益率に等しくなることである。

11.7　資本資産評価モデル

1)　CAPM の諸仮定

・投資家は、競争的市場価値で（税や取引コストなしに）すべての証券を売買でき、無リスク利子率で賃借できる。

・投資家は、市場で取引される証券から構成される効率的ポートフォリオ、すなわち、所与のボラティリティの下で最大の期待収益率をえられるポートフォリオのみを保有する。

・投資家たちは、証券のボラティリティ、相関、期待収益率について同質的予想を持っている。

2)　供給、需要、そして市場ポートフォリオの効率性

・接点ポートフォリオは市場ポートフォリオと等しくなる必要がある。

3)　最適な投資：資本市場線

・接線が市場ポートフォリオを通るとき、それは資本市場線（CML：Capital Market Line）と呼ばれる。

11.8　リスクプレミアムの決定

1)　市場リスクとベータ値

・期待収益率に関する CAMP の公式

$$E[R_i] = r_i = r_f + \beta_i \times (E[R_{Mkt}] - r_f)$$

・証券のベータは、市場全体に対する市場リスクによるボラティリティとして算出される。

2)　証券市場線：期待収益率に関する CAMP の公式を表すグラフで、すべての証券のリスクプレミアムは、市場リスクとその証券のベータの積に等しい。

3)　ポートフォリオのベータ値：ポートフォリオに含まれる証券のベータの加重平均

■コメンテーターへのクイズ

1) 2つの株式銘柄の相関は、それらを組み合わせたポートフォリオのリスクと収益率にどのような影響を与えるか。

2) ポートフォリオのボラティリティは、含まれる株式の加重平均ボラティリティと比べてどのような違いがあるか。

3) 新規投資がポートフォリオのシャープ比を改善できるのはどんなときか。

■コメント

・$Cov(\sum_i x_i R_i, R_p)$は、具体的には$Cov(x_i R_i + x_2 R_2 + x_3 R_3, R_p)$と表すことができるが、これはどのように計算するのか。

・$Cov(R_p, R_p) = Cov(\sum_i x_i R_i, R_p)$で、片方の$R_p$だけ変換することに感心した。そうすることで、ポートフォリオの分散がそれ自身と個々の株式間の共分散の加重平均に等しいということができている。

・421p の図 11.4 では、相関が-1 だとリスクがゼロで、収益率は 13%ほどとなっている。しかし、相関が−１だと収益を得た分と損なった分が等しく、収益もゼロになるのではないか。

・ポートフォリオを組むことで、リスクは分散化され低下し、期待収益率は加重平均のままだということが頭では理解できたが、実際には本当にそうであるのかという疑問が残る。